# Глава 2. Решение систем линейных уравнений.

## §1. Основные понятия и определения

Пусть задана система **m** линейных уравнений с **n** переменными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \; + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \; + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad ,\text{где}$$

$a_{ij}$ – коэффициент при переменных

$i = 1, 2, \ldots, m$ ; $j = 1, 2, \ldots, n$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ – переменные

$b_1, b_2, \ldots, b_m$ – свободные члены

Определение 1. ***Решением*** данной системы называется такая совокупность **n** чисел $(x_1 = \alpha_1 ; x_2 = \alpha_2 ; \ldots ; x_n = \alpha_n)$, при подстановке которых каждое уравнение системы обращается в верное равенство.

Определение 2. Система уравнений называется ***совместной***, если она имеет хотя бы одно решение, и ***несовместной***, если она не имеет решений.

Определение 3. Совместная система называется ***определенной***, если она имеет единственное значение, и ***неопределенной***, если она имеет более одного решения.

Определение 4. Две системы уравнений называются ***равносильными*** или эквивалентными, если они имеют одно и то же множество решений (элементарные преобразования переводят одну систему в ей равносильную).

Рассмотрим некоторые способы решений систем линейных уравнений.

## §2. Формулы Крамера

1. Пусть дана система двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 = b_2 \end{array}\right. \left| \begin{array}{l} \cdot a_{22} \\ \cdot a_{12} \end{array}\right.$$

$$-\left\{\begin{array}{l} a_{11}\cdot a_{22}\cdot x_1 + a_{12}\cdot a_{22}\cdot x_2 = b_1\cdot a_{22} \\ a_{21}\cdot a_{12}\cdot x_1 + a_{22}\cdot a_{12}\cdot x_2 = b_2\cdot a_{12} \end{array}\right.$$

$$a_{11}\cdot a_{22}\cdot x_1 - a_{21}\cdot a_{12}\cdot x_1 = b_1\cdot a_{22} - b_2\cdot a_{12}$$

$$x_1(a_{11}\cdot a_{22} - a_{21}\cdot a_{12}) = b_1\cdot a_{22} - b_2\cdot a_{12}$$

$$x_1 = \frac{b_1\cdot a_{22} - b_2\cdot a_{12}}{a_{11}\cdot a_{22} - a_{21}\cdot a_{12}} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}$$

Аналогично можно вывести формулу для переменной $x_2$:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 = b_2 \end{array}\right. \left| \begin{array}{l} \cdot a_{21} \\ \cdot a_{11} \end{array}\right.$$

$$-\left\{\begin{array}{l} a_{11}\cdot a_{21}\cdot x_1 + a_{12}\cdot a_{21}\cdot x_2 = b_1 \\ a_{21}\cdot a_{11}\cdot x_1 + a_{22}\cdot a_{11}\cdot x_2 = b_2 \end{array}\right.$$

$$a_{12}\cdot a_{21}\cdot x_2 - a_{22}\cdot a_{11}\cdot x_2 = b_1\cdot a_{21} - b_2\cdot a_{11}$$

$$x_2\cdot(a_{12}\cdot a_{21} - a_{22}\cdot a_{11}) = b_1\cdot a_{21} - b_2\cdot a_{11}$$

$$x_2 = \frac{b_1 \cdot a_{21} - b_2 \cdot a_{11}}{a_{12} \cdot a_{21} - a_{22} \cdot a_{11}} = \frac{-\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}$$

Окончательно имеем: $\boxed{x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} \quad ; \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}}$ - **<u>формулы Крамера</u>**, где:

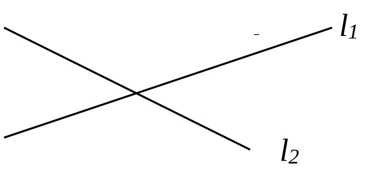
$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} -$ главный определитель системы ;

$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} -$ вспомогательный определитель для $x_1$;

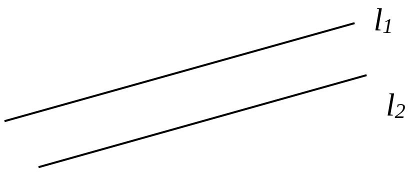
$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} -$ вспомогательный определитель для $x_2$ .

**<u>Виды решений системы 2-х линейных уравнений:</u>**

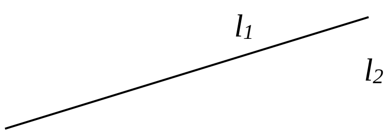
1) $\Delta \neq 0 -$ система имеет единственное решение $(x_1; x_2)$




2) $\Delta = 0; \ \Delta_{x_i} \neq 0; \ i = 1, 2 -$ система не имеет решения




3) $\Delta = \Delta_{x_i} = 0 -$ система имеет множество решений



2. Рассмотрим систему 3-х линейных уравнений с тремя переменными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad (x_1; x_2; x_3) - ?$$

Эту систему тоже можно решить по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} \quad ; \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} \quad ; \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} \quad ,\text{где}$$

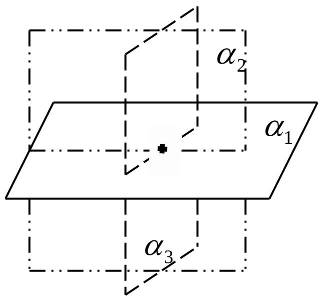
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \text{главный определитель системы}$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad ; \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \quad ; \quad \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

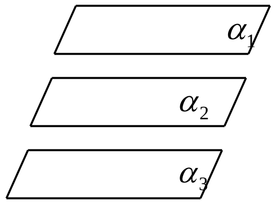
-вспомогательные определители системы.

**<u>Виды решений системы 3-х линейных уравнений</u>:**

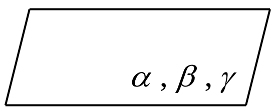
***1)*** Если $\Delta \neq 0$ - система имеет ***единственное решение***




2) Если $\Delta = 0$;  $\Delta_{x_i} \neq 0$;  $i = 1, 2, 3$ - система ***решений не имеет***




3) Если $\Delta = \Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = \Delta_{x_3} = 0$ - система имеет ***множество решений***.




## §3. Метод Гаусса

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

В основе метода Гаусса лежит последовательное исключение неизвестных. С помощью элементарных преобразований, система уравнений приводится к ей равносильной ступенчатого или треугольного вида, из которой последовательно, начиная с последних переменных, находят все остальные.

При решении методом Гаусса можно:

- переставлять местами два любых уравнения системы;
- умножать обе части уравнения на произвольное, отличное от нуля число;
- прибавлять к обеим частям одного уравнения соответствующие части другого, умноженного на какое-то постоянное число.

Система обычно решается с помощью преобразований расширенной матрицы (матрицы коэффициентов при неизвестных и свободных членов).

Если в результате преобразования матрицы:

1) получится строка:

0 0 0 … 0 c b – система имеет ***единственное решение***

$$0\cdot x_1+0\cdot x_2+\ldots+0\cdot x_{n-1}+c\cdot x_n=b_i$$

2) появится строка, состоящая из нулей

0 0 0 … 0 0 – система имеет ***множество решений***

$$0\cdot x_1+0\cdot x_2+\ldots+0\cdot x_n=0$$

3) появится строка

0 0 0 … 0 b – система ***решений не имеет***

$$0\cdot x_1+0\cdot x_2+\ldots+0\cdot x_n=b$$

Пример: Методом Гаусса решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1-\ \ x_2+\ 2x_3=1\\ 5x_1-3x_2+2x_3=5\\ x_1+3x_2+3x_3=18\end{cases}$$

$$(-1)\quad(-5)\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&1\\5&-3&2&5\\1&3&3&18\end{array}\right)\sim(-2)\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&1\\0&2&-8&0\\0&4&1&17\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&2&1\\0&2&-8&0\\0&0&17&17\end{array}\right)$$

$$0\quad 0\quad c\quad b$$

Запишем полученную систему треугольного вида

$$\begin{cases} x_1-x_2+2x_3=1\\ \quad 2x_2-8x_3=0\\ \qquad 17x_3=17\end{cases}\qquad \begin{matrix}x_1-4+2=1\\ 2x_2-8\cdot 1=0\\ \end{matrix}\qquad \begin{matrix}\\ 2x_2=8\\ \end{matrix}\qquad \begin{matrix}\underline{x_1=3}\\ \underline{x_2=4}\\ \underline{x_3=1}\end{matrix}$$

$\text{Ответ}:(3,\ 4,1)$

## §4. Матричный метод решения систем линейных уравнений

Пусть дана система уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Введем обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad ; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad ; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Тогда первую часть этой системы можно будет представить в виде произведения двух матриц, а всю систему можно записать в виде матричного уравнения: $A \cdot X = B$.

Чтобы решить это матричное уравнение, нужно обе части слева умножить на $A^{-1}$:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow E \cdot X = A^{-1} \cdot B \quad \Rightarrow \boxed{X = A^{-1} \cdot B}$$

Замечание: Матричным методом можно решать систему уравнений, если матрица $A$ невырожденная.

Пример: Решить матричным способом систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 33 \\ 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 24 \\ 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -8 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad ; \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 33 \\ 24 \\ -8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot 33+(-1)\cdot 24+1\cdot(-8) \\ (-38)\cdot 33+41\cdot 24-34\cdot(-8) \\ 27\cdot 33-29\cdot 24+24\cdot(-8) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ответ: (1; 2; 3)